LA GEOMETRIA ESPACIAL EN EL AULA

Ana María Redolfi Gandulfo
gandulfo@uol.com.br
Universidade de Brasília – Brasil

Tema: Formación y Actualización del Profesorado
Modalidad: Mini Curso
Nivel educativo: Formación y actualización docente
Palabras clave: geometría espacial; poliedros; recursos didácticos; interdisciplinaridad

Resumen
El objetivo de este mini curso es el desenvolvimiento de la percepción espacial y la construcción del conocimiento geométrico espacial. El programa incluye las figuras poliédricas, sus elementos, propiedades y clasificaciones, exploración de los diferentes tipos de poliedros: deltaedros, regulares, arquimedianos, duales, compuestos, de Kepler-Poinsot; disecciones y retículas de poliedros, empaquetamientos del espacio y la identificación de diversas figuras espaciales en la naturaleza, arte y arquitectura. Los recursos didácticos constituyen instrumentos importantes para la comprensión de la geometría espacial y sus aplicaciones, estimulan el pensamiento creativo, facilitan la adquisición de técnicas y habilidades de percepción visual, motivan el desenvolvimiento de experiencias, imprimen un carácter lúdico a las actividades y transforman las clases que resultan más dinámicas y atractivas. Los temas son abordados con metodología activa, apoyada en los descubrimientos de los alumnos, que incluyen la realización de experiencias y resolución de problemas. Los materiales didácticos necesarios para las actividades y todas las soluciones serán colocados a disposición de los participantes. Con esta propuesta metodológica de enseñanza de la geometría pretendemos aumentar el interés por la geometría espacial, motivar e ilustrar la función de los recursos didácticos en las clases y los planteos interdisciplinares con otras áreas.

Introducción

La Geometría proporciona al educador una vía magnífica y placentera hacia los descubrimientos matemáticos, plena de actividades de modelaje e de representaciones visuales, de acciones exploratorias, de investigación, de conjeturas y verificaciones, de resolución de problemas y de aplicaciones en el mundo real. El medio ambiente y los recursos naturales son objetos de estudio y de desenvolvimiento de la capacidad creadora de la humanidad y la Geometría ofrece muchas y variadas posibilidades en la hora de experimentar.

El estudio de las figuras espaciales se inicia por el estudio geométrico de las figuras poliédricas, definiendo distintos tipos de poliedros, efectuando clasificaciones según sus propiedades y estableciendo las bases para la construcción y la identificación de las diversas figuras espaciales y de patrones de simetría en la naturaleza orgánica e inorgánica, en arte y arquitectura.

En Geometría es adecuado aplicar el proceso de enseñanza fundamentado en las actividades creativas y en los descubrimientos, donde los alumnos son los constructores de sus conocimientos y el profesor es el orientador del proceso constructivo. El reconocimiento de las dificultades existentes al abordar el estudio de la Geometría Espacial, entre las cuales surgen inicialmente las de visualización en el espacio, impulsan la búsqueda de novas estrategias con el objetivo de aumentar las posibilidades de superar los obstáculos encontrados en la enseñanza e aprendizaje de este tema.

Los modelos pedagógicos tienen un papel importante en la enseñanza de la Geometría y son utilizados en la explicación de los fenómenos naturales, la verificación empírica de los conceptos y la resolución de problemas. En la diversidad de recursos, de instrumentos y de modelos se encuentran los medios para las diferentes representaciones de los elementos geométricos, criando así nuevas posibilidades de adquisición de los conceptos y conocimientos geométricos.

En este trabajo, el abordaje de los temas teóricos incluye la realización de experiencias y la resolución de problemas con o auxilio de diferentes recursos didácticos. Todos ellos y las correspondientes soluciones, serán colocadas a disposición de los profesores participantes.

1. Los poliedros

Poliedro es la figura formada por un conjunto de polígonos planos tales que:

- la intersección de dos polígonos es un lado o es un vértice o es vacía,
- cada lado de un polígono es lado de otro y solo de más un polígono del conjunto,
- dos polígonos con un lado común no son coplanares.

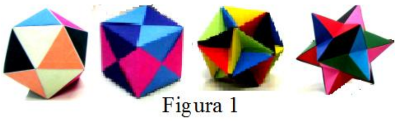


Figura 1

Las *caras del poliedro* son los polígonos que definen el poliedro. Las *aristas*, los *vértices* y los *ángulos de las caras* del poliedro son, respectivamente, los lados, vértices y ángulos internos de las caras del poliedro. *Caras adyacentes* de un poliedro son las caras que tienen una arista común. *Vértices adyacentes* de un poliedro son los extremos de una misma arista, *vértices opuestos* son los vértices no adyacentes que pertenecen a caras distintas del poliedro. *Orden de un vértice* es el número de caras que concurren en él. Vértices *congruentes* son aquellos vértices donde concurren el mismo número de caras y en la misma orden. *Diagonal de un poliedro* es el segmento que une vértices de caras no adyacentes del poliedro. Un *ángulo diedro de un poliedro* es definido por los semiplanos de dos caras adyacentes y la arista común a ellas.

Los poliedros son clasificados por el número de caras: tetraedro (4), pentaedro (5), hexaedro (6), heptaedro (7),…, icosaedro (20),… .

Poliedro convexo es el poliedro que está totalmente contenido en uno de los semiespacios en relación al plano de cada una de sus caras.

La *figura del vértice* de un poliedro convexo es el polígono con lados que unen los puntos medios de las aristas adyacentes concurrentes en ese vértice.

Los *prismas rectos* son poliedros con dos caras opuestas congruentes paralelas entre sí, llamadas bases, unidas por rectángulos, llamados caras laterales; los *prismas oblicuos* tienen las bases unidas por paralelogramos, con excepción de los rectángulos y los cuadrados. Los *antiprismas* son poliedros con dos polígonos congruentes paralelos más uno de ellos está girado con relación a la otra base y las caras laterales son triángulos.

Las *pirámides* son poliedros con una sola base y las caras laterales son triángulos que concurren en un mismo punto común, llamado vértice de la pirámide. Las *bipirámides* son formadas por la unión de dos pirámides por las bases, las cuales deben ser iguales. Ver ejemplos de prismas, antiprismas, pirámides y bipirámides en las Figuras 2, 3, 4, 7, 8 y 11. Estos poliedros son llamados según el polígono de su base.

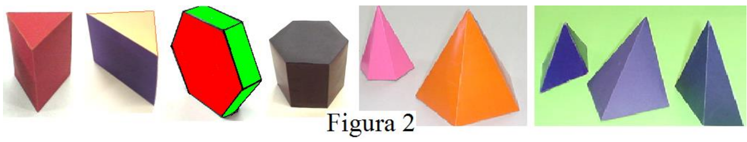


Figura 2

Los *deltaedros convexos* son poliedros convexos cuyas caras son triángulos equiláteros congruentes.

Figura 3

2. Poliedros de Platón

Los p*oliedros regulares convexos* o *poliedros de Platón* son poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares congruentes y todos los vértices son congruentes. Los poliedros de Platón son: tetraedro regular, cubo, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular, Figura 4.

Figura 4

La fórmula de Euler : C + V = A + 2, donde C, V y A son, respectivamente, el número de caras, de vértices y de aristas del poliedro, es válida para todo poliedro convexo.

3. Poliedros semiregulares

Poliedros semiregulares son poliedros cuyas caras son polígonos regulares de dos o más tipos diferentes, siendo congruentes los del mismo tipo, y con la misma configuración de caras en todos los vértices.

Segundo Pappus, fue Arquímedes quien primero describió trece de los poliedros semiregulares e indicó todos sus elementos, en una obra que se perdió. Kepler, dio el nombre *poliedros arquimedianos* a esas trece figuras, Figura 5.

Figura 5

Los poliedros arquimedianos son obtenidos por procesos de truncamiento de los poliedros regulares convexos. Un poliedro semiregular es el poliedro de Sommerville o pseudorombicuboctaedro, cuja descripción fue dada en 1905 por Duncan M. Y. Sommerville, Figura 6.

Figura 6

También son poliedros semiregulares los prismas formados por dos poliedros regulares paralelos, que son las bases, y las caras laterales son cuadrados cujas aristas unen vértices de las bases, Figura 7. Completan el conjunto de los poliedros semiregulares los antiprismas de caras regulares, Figura 8. Kepler identificó e clasificó los prismas semiregulares y los antiprismas semiregulares, juntándolos a los poliedros arquimedianos.

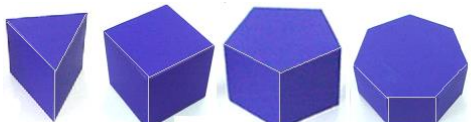


Figura 7

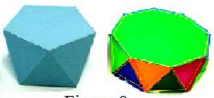


Figura 8

4. Poliedros duales

Dos poliedros son duales cuando el número de caras, el número de aristas de las caras y el número de vértices de uno de ellos coincide con el número de vértices, el orden de los vértices y el número de caras del otro poliedro y las aristas se corresponden una a una.

El poliedro dual de cualquier poliedro de Platón puede ser representado por el poliedro cuyas aristas unen los centros de las caras adyacentes del poliedro de Platón. Los poliedros duales de los poliedros platónicos también son poliedros regulares convexos.

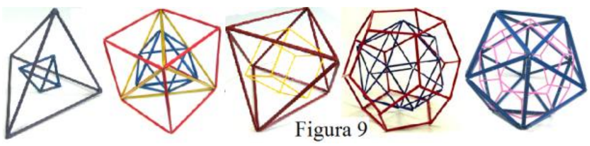


Figura 9

Los poliedros duales de los poliedros arquimedianos son llamados poliedros de Catalan; ellos

Figura 10

no son poliedros semiregulares, ver ejemplos en la Figura 10. Todas las caras de cada poliedro de Catalan son polígonos irregulares congruentes y los vértices no son congruentes. Los poliedros duales de los prismas semiregulares son bipirámides, Figura

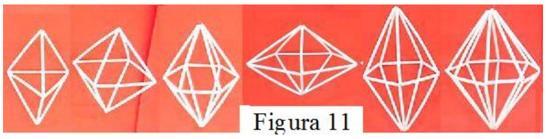


Figura 11

11. Los poliedros duales de los antiprismas semiregulares tienen caras congruentes formadas por

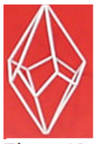


Figura 12

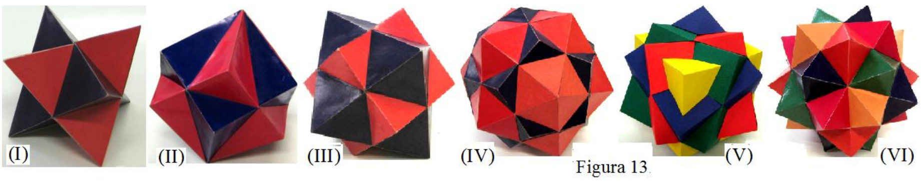
trapezoides, como en la Figura 12.

5. Poliedros de Johnson

Poliedros de Johnson son poliedros cuyas caras son polígonos regulares y todas sus aristas son congruentes. Norman W. Johnson describió esos poliedros y en 1969 Victor Zalgaller demonstró que, com excepción de los poliedros de Platón y los poliedros semiregulares, existen exactamente 92 poliedros de Johnson.

6. Poliedros compuestos

Los *poliedros compuestos* resultantes de la composición de un par de poliedros convexos regulares tienen aristas que se bisecan perpendicularmente.



(I) (II) (III) (IV) (V) (VI)

Figura 13

Los poliedros compuestos son no convexos, siendo que el poliedro formado por dos tetraedros convexos regulares fue llamado por Kepler de estrella octangular, Figura 13(I). Otros ejemplos de poliedros compuestos incluyen el formado por cuatro cubos y otro formado por cinco octaedros regulares, ver Figura 13 (V) y (VI).

7. Secciones de poliedros convexos regulares

Las determinaciones de intersecciones de poliedros con planos son importantes recursos para la experimentación y verificación de las propiedades de las figuras en el espacio.

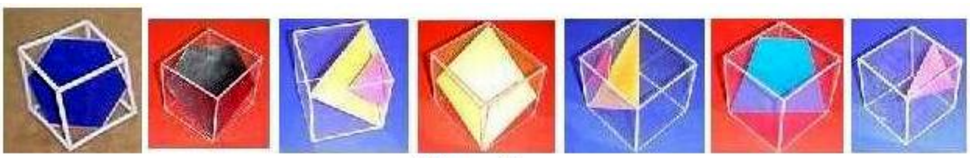


Figura 14

8. Poliedros de Kepler-Poinsot

Los poliedros regulares no convexos son cuatro, dos de ellos fueron investigados por Kepler, dos poliedros dodecaedros estrellados, y Poinsot agregó dos poliedros cujas caras son polígonos regulares convexos dispuestos de forma estrellada en cada vértice, Figura 16.

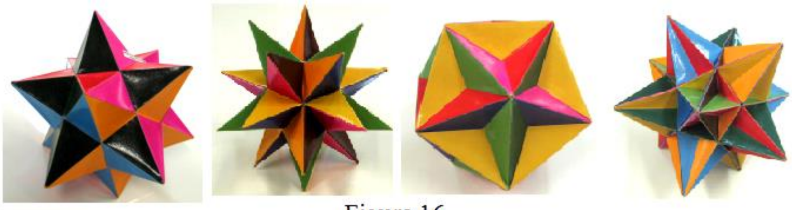


Figura 16

A. Cauchy demostró que solamente existen cuatro poliedros regulares no convexos.

9. Simetrías en el espacio

Una *isometría T* es una transformación que preserva la forma y el tamaño de las figuras. Una *simetría* T de un conjunto K es cualquier isometría T que deja K invariante, aunque os pontos de K pueden haber sido transformados.

Una figura F tiene *simetría de reflexión* con respecto a un plano Π si F se transforma en ella misma por reflexión con respecto al plano Π, llamado *plano de simetría* de F. Entonces, para cada punto P de F el punto simétrico P' con respecto a Π pertenece a F.

Una figura F tiene *simetría rotacional* de ángulo $\hat{\theta} = \frac{360^o}{n}$ con respecto a una recta *r* si la figura se transforma en ella misma por la rotación de ángulo θ en torno de r, $\rho_{r,\frac{360^o}{n}}$.

Una figura F tiene *simetría central* con respecto a un ponto A de F, si para cada punto P de F la imagen P´ por la rotación de ángulo θ = 180º en torno de A también pertenece a F y A es punto medio del segmento PP'. A es el *centro de simetría* de la figura F.

El *grupo de simetría* de una figura contiene todas las simetrías de la figura.

10. Simetrías de poliedros

Los poliedros regulares convexos tienen centro de simetría, ejes y planos de simetría, Ver ejes de simetría en la Figura 17.

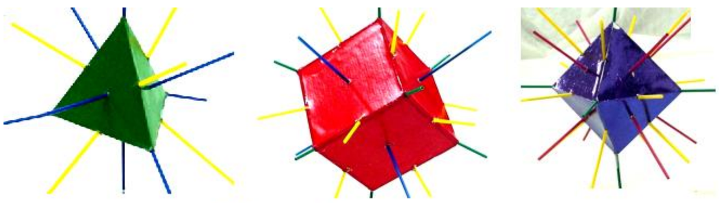


Figura 17

Los caleidoscopios poliédricos son recursos importantes para el estudio de las simetrías de los poliedros convexos regulares y de los poliedros semiregulares, ver ejemplos en la Figura 18.

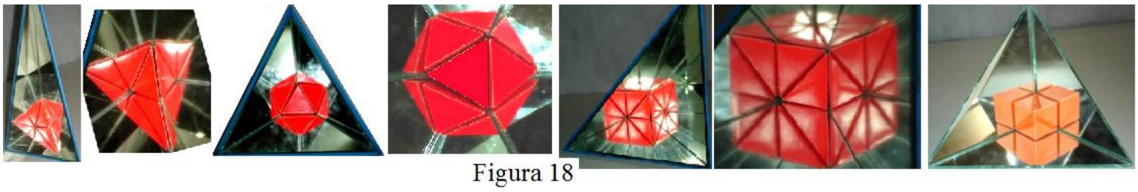


Figura 18

11. El rellenado del espacio

Una condición para que poliedros rellenen el espacio es que la suma de las medidas de los ángulos diedros de los poliedros que concurren en cada arista sea igual a cuatro ángulos rectos. De los poliedros tratados antes forman relleno del espacio con copias congruentes de la misma figura: cubo, octaedro truncado, prisma regular hexagonal, dodecaedro rómbico, ver Figura 19.

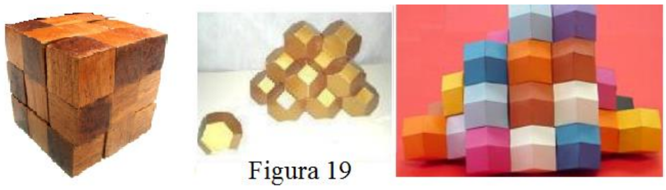


Figura 19

E. Fedorov, cristalógrafo ruso, hizo importantes contribuciones al estudio de los poliedros que rellenan el espacio, relacionados con sus estudios sobre formación de los cristales. Entre los conjuntos de poliedros de más de un tipo que rellenan el espacio están: octaedros y coboctaedros; tetraedro truncado, octaedro truncado y cuboctaedro; cubo,prisma octogonal, cubo truncado y pequeño rombicuboctaedro; prisma octogonal y grande rombicuboctaedro. Ejemplos de estos rellenados del espacio en la Figura 20.

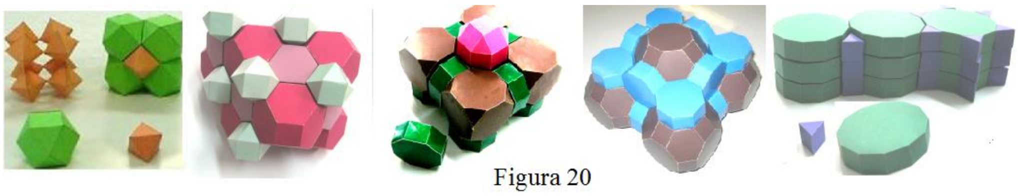


Figura 20

12. Poliedros, Arte, Arquitectura y Naturaleza

Un vasto campo de aplicación de los conceptos tratados está en la naturaleza, donde los poliedros existen en abundancia, también los poliedros pueden ser encontrados, por ejemplo, en las artes y en la arquitectura, ver la Figura 21.

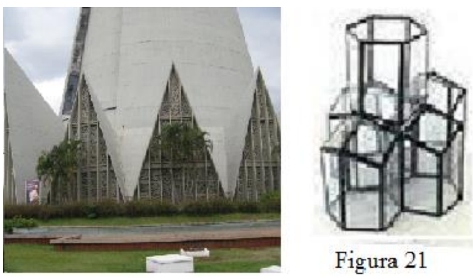


Figura 21

13. Los poliedros en el aula

Los modelos de poliedros son recursos didácticos importantes para el estudio de la geometría espacial por ser grandes facilitadores de la visualización y de la comprensión de los tópicos aquí tratados. Los poliedros usados para el desarrollo de las actividades en las clases pueden ser confeccionados con diversos materiales, por ejemplo, papeles coloridos para origami (Figura 1), polígonos de cartones coloridos unidos por gomas elásticas (Figura 4), cañas de refresco unidas por alambres o hilos eléctricos (Figuras 9, 11, 12), madera (Figura 19), vidrio (Figura 14), cartulinas o cartones coloridos como en la otras figuras restantes. Todos estos modelos son adecuados para la realización de experiencias, individuales o en grupos.

14. Conclusión

Con este mini curso y la metodología de enseñanza de los temas, abordados con un tratamiento dinámico y lúdico, pretendemos incentivar e ilustrar la función de los recursos didácticos en las clases como importantes herramientas facilitadoras de la comprensión, experimentación y resolución de problemas. También buscamos aumentar el interés por la geometría espacial, destacando la importancia de esta disciplina en los programas escolares y de los planteos interdisciplinares por sus relaciones con otras áreas de conocimiento.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J., Giménez, J. y Torra, M. (1998). *Enseñar Matemática*. Barcelona: Editora Graó.

Coxeter, H. S. M. (1971). *Introduction to Geometry*. New York: John Wiley.

Ghyka, M. (1969). *The Geometry of Art and Life*. New York: Dover.

Hoffer, A. (1983). *Van Hiele-based Research*. New York: Academic Press.

Holden, A. (1991). *Shapes, space and symmetry*. New York: Dover.

Kappraff, J. (1991). *Connections: the geometric bridge between art and science.* New York: MaGraw-Hill.

Martin, G. E. (1982). *Transformation Geometry. An Introduction to Simmetry*. New York: Springer-Verlag.

Soler, G. G. (1997) *Poliedros*. Madrid: Síntesis.

Weyl, H. (1989). *Symmetry*. New Jersey: Princeton University Press.

Williams, R. (1979) *The geometrical foundation of natural structure*. New York: Dover.